

Entstehung von Wolken und Niederschlag

Die Bildung von Wolken und der eventuell später daraus entstehende Niederschlag sind eines der komplexeren Abläufe in der Troposphäre. Das Foto zeigt den Beginn der Kondensation. Der in der Atmosphäre vorhandene Wasserdampf wird damit erstmals sichtbar. Welche Art von Wolken sich dann weiter entwickeln, hängt davon ab, in welcher Schichtung sich die Troposphäre befindet, ob genügend Feuchtenachschub für ein weiteres Wachstum der Wolken vorhanden ist usw. Im Gegensatz zur Kondensation an Oberflächen, ist der Ablauf der Kondensation bei der Wolkenbildung komplizierter. Bei der Tröpfchenbildung bedarf es schwebende Teilchen in der Luft, die als Kondensationskerne oder Kondensationskeime bezeichnet werden. Bei sehr warmer und feuchter Luft, beispielsweise im Sommer, kann der Prozess der Kondensation schon weitaus früher beobachtet werden, bevor die Wolken sichtbar werden. Die sogenannte Vorkondensation macht sich in Form von Dunst am blauen Himmel bemerkbar und kann als Vorstufe zur Wolkenbildung angesehen werden. Alle Kondensationsformen haben eines gemeinsam, nämlich die Abkühlung: Entweder an Oberflächen oder in der Atmosphäre. Bei der Wolkenbildung ist es i.d.R. die Abkühlung der Luft bis zum Kondensationspunkt oder aber durch weitere Zunahme des Wasserdampfgehaltes (Anstieg der Feuchte bei nahezu gleichbleibender Temperatur = Advektionsnebel, Advektionswolken)

Eine Wolke ist definiert als eine (sichtbare) Suspension kleiner Partikel in der Atmosphäre. Für eine Wasserwolke gibt es eine Reihe von Partikeltypen, die uns interessieren.



Aber nur mit der Abkühlung allein wird noch kein Tropfen sichtbar. Hier kommen die zuvor angesprochenen Kondensationskerne ins Spiel. Denn ohne fremde Hilfe ist die Bildung von Wolken durch Kondensation und Sublimation nicht möglich. Denn die Atmosphäre besteht nicht aus absolut sauberer Luft. Es gelangen ständig Staub- und Salzpartikel in die Atmosphäre. Diese feinsten Partikel oder Aerosole haben eine Kerngröße von 10^{-2} - 10^{-1} .In einer völlig staubfreien Atmosphäre müssten Sättigungswerte von mehreren Hundertprozent erreicht werden. Dies wäre in der Natur völlig unrealistisch. Selbst in Laborversuchen lässt sich eine Kondensation in reiner Luft kaum erreichen. Erst ab einer relativen Feuchte von 800 % habe man feinste Wassertröpfchen erreichen können. Dies hängt damit zusammen, dass über gekrümmte Oberflächen, wie eben bei einem Tropfen, ein höherer Sättigungsdampfdruck erforderlich ist. Physikalisch hängt dies mit dem sog. Krümmungseffekt zusammen. Je kleiner der Tropfen, desto höher die Übersättigung. Beschränken wir uns also auf die heterogene Kondensation, die an bereits vorhandene Partikel vonstattengeht, an denen es nur geringe Übersättigungen des Dampfes benötigt.

Wolkenbildungskerne

Kondensationskerne	Kerne, auf denen der Wasserdampf ab 80 % relativer Luftfeuchte kondensieren kann; ihre Effektivität ist von der Kerngröße und der hygroskopischen Wirkung des Teilchens abhängig; gute Kondensationskerne sind große Lösungströpfchen von Salzen oder Säuren und Salzkristalle
Sublimationskerne	Kerne, an denen bei tiefen Temperaturen Wasserdampf sublimiert; ihre Effektivität wird von ihrem eisähnlichen Aufbau bestimmt; gute Sublimationskerne stellen große, wasserunlösliche Teilchen mit kristalliner, eisähnlicher Struktur dar
Mischkerne	Mischkerne, der Hauptanteil der Kondensationskerne, bestehen aus festen, mit löslichen Substanzen behafteten Partikeln
Gefrierkerne	Teilchen, die den Gefrierprozess von unterkühlten Tröpfchen einleiten; im Allgemeinen werden ab -10 °C die ersten Kerne wirksam, ab -35 °C sind alle effektiv; gute Gefrierkerne sind große, wasserunlösliche Teilchen mit kristalliner, eisähnlicher Struktur

Krümmungseffekt

Die Beziehung zwischen der erforderlichen Übersättigung und einer ebenen Wasserfläche kann durch die Kelvin-Gleichung erreicht werden.

$$RH\% = 100\% \cdot \exp \left[\frac{2 \cdot \sigma}{p_m \cdot k_b \cdot T \cdot R} \right]$$

σ Oberflächenspannung vom reinen Wasser bei 0°C [0,076 Nm⁻¹]

p_m Anzahldichte der Wassermoleküle bei 0°C [3,3x10²⁸ m⁻³]

k_b Boltzmann Konstante [1,38x10⁻²³ J/K]

T Absolute Temperatur in Kelvin [K]

RH Relative Feuchte [%]

In Annäherung kann auch die Kurzform geschrieben werden

$$RH\% = 100\% \cdot \exp \left[\frac{r}{T \cdot R} \right]$$

$$r \text{ 0,3338 } \mu\text{m} \cdot \text{K} = 2 \cdot \sigma / p_m \cdot k_b$$

$$RH\% = 100\% \cdot \exp \left[\frac{0,338 \mu\text{m} \cdot \text{K}}{273\text{K} \cdot 0,03 \mu\text{m}} \right]$$

$$RH = 104,21\%$$

Bei einem Tropfenradius von 3^{-2} μm wäre der Sättigungsdampfdruck um 4,21 % erhöht. Bei einem Radius von 10^{-6} μm sind es bereits 12% Erhöhung im Vergleich zur ebenen Wasseroberfläche. Das bedeutet, dass bei sehr kleinen Tropfen von unter 1 μm , die Luft so ungesättigt ist, dass sie nach der Kondensation gleich wieder verdunsten müssten.

Je kleiner die Tropfen sind, desto schneller verdampfen sie wieder. Es ist somit eine Übersättigung für die Kondensation notwendig, um bei der Reduzierung des Tropfenradius diese im Gleichgewicht zu halten.

In der Tabelle sind die kritischen Radien von chemisch reinen Wassertropfen und die relative Sättigungsfeuchte aufgeführt.

Tropfenradius [m]	Relative Sättigungsfeuchte %
∞	100
10^{-4}	100.001
10^{-5}	100.011
10^{-6}	100.11
10^{-7}	101.15
10^{-8}	112.1
10^{-9}	314

Über einer ebenen, chemisch reinen Wasseroberfläche beträgt die Sättigungsfeuchte 100%. Je kleiner der Tropfenradius, desto höhere Sättigungswerte wären erforderlich. Bei einem sehr kleinen Tropfenradius von 10^{-9} würde Kondensation erst bei einer relativen Feuchte von über 314% eintreten. Wäre dies der Fall, könnten sich gar keine Wolken bilden.

Hier zeigt sich also die Notwendigkeit von Kondensationskeimen oder Nukleationsteilchen in der Troposphäre. Deshalb kommt noch ein weiterer physikalischer Effekt, der für die Tropfenbildung wichtig wird, ins Spiel: der sog. *Lösungseffekt*. Gibt man in chemisch reines Wasser etwas Kochsalz, erhöht sich dadurch die Anziehungskraft zwischen den Molekülen. Im Gegensatz zum Krümmungseffekt, wo es höhere Sättigungswerte für die Kondensation braucht, sinkt unter dem Einfluss des Salzes in einer wässrigen Lösung der Sättigungswert. Je höher die Konzentration der Lösung ist, umso größer ist die Erniedrigung des Dampfdrucks über dem Tropfen.

Molekulargewichte der verschiedenen chemischen Lösungen

	Einheit	Molgewicht
Salz	NaCl	58,44
Ammoniumsulfat	(NH ₄) ₂ SO ₄	132,13
Wasserstoffperoxyd	H ₂ O ₂	34,01
Schwefelsäure	H ₂ SO ₄	98,07
Salpetersäure	HNO ₃	63,01

Lösungseffekt

Über die Köhler-Gleichung lässt sich die Sättigungserniedrigung mit dem jeweiligen Lösungsmittel bestimmen. Wir ermitteln die Gleichgewichtsfeuchte über einem Tröpfchen mit einem Radius von $0,2 \mu\text{m}$, Temperatur 20°C (293 K), das 370 g Salz in 1 Liter Wasser enthält.

$$T \quad 293 \text{ [K]}$$

$$R \quad 0,2 \text{ [}\mu\text{m]}$$

$$\text{NaCl} \quad 370 \text{ [g]}$$

i (van't Hoff Faktor) Anzahl der Ionen pro Molekül in der Lösung

m_s die Masse des gelösten Stoffes im Tropfen

M_s das Molekulargewicht [g]

$$C_1 \quad 0,3338 \text{ K}/\mu\text{m}$$

$$C_2 \quad 4 \times 10^{-12} \mu\text{m}$$

$$\text{RH} = \frac{e_s^*}{e_s} \approx \frac{\exp\left(\frac{C_1}{T \cdot R}\right)}{1 + \frac{C_2 \cdot i \cdot m_s}{M_s \cdot R^3}}$$

$$\text{RH} = \frac{e_s^*}{e_s} \approx \frac{\exp\left(\frac{0,3338 \text{ K } \mu\text{m}}{293 \text{ K} \cdot 0,2 \mu\text{m}}\right)}{1 + \frac{(4,3 \times 10^{12} \mu\text{m}) \cdot 3 \cdot (10^{-16})}{(58,44 \text{ g}) \cdot (0,2 \mu\text{m}^3)}}$$

$$1,00578 / 1,103 = 0,91 \cdot 100 = 91 \%$$

Die Sättigung würde in dem Fall bereits bei einer relativen Feuchte von 91% einsetzen. Relative Sättigungsfeuchte über Tröpfchen mit verschiedenen Kochsalzkonzentrationen bei konstantem Radius von $r = 4 \times 10^{-7} \text{ m}$

Masse des Kochsalzkerns [g]	Relative Sättigungsfeuchte [%]
10^{-13}	81
10^{-14}	98
10^{-15}	100.09

Ist das Tröpfchen von $4 \times 10^{-7} \text{ m}$ sehr klein und die Salzkonzentration am höchsten, überwiegt die Dampfdruckerniedrigung aufgrund des Lösungseffekts.

Relative Sättigungsfeuchte über einen chemisch reinen Tropfen

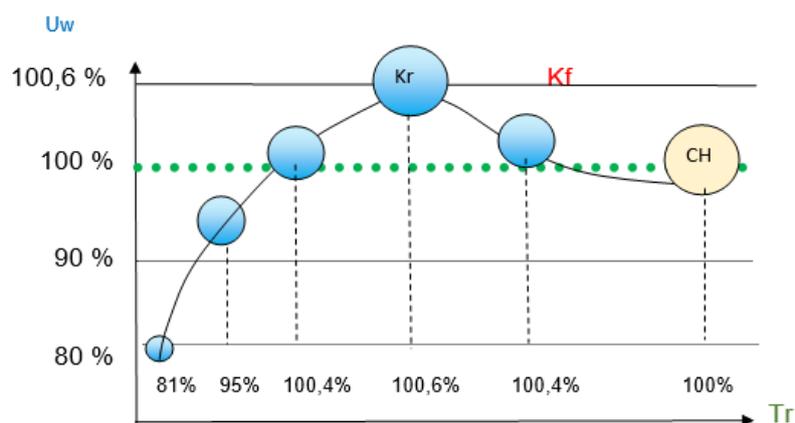
- U_{sTr} Relative Sättigungsfeuchte über ein chemisch reines Tröpfchen
 E_{Tr} Sättigungsdampfdruck [hPa] über dem chemisch reinen Wassertropfen
 E_w Sättigungsdampfdruck[hPa] über einer chemisch reinen Wasseroberfläche
 σ Oberflächenspannung [N m] von Wasser; $\sigma = 72.5 \times 10^{-3} \text{ N m}$ bei $t = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ und $p = 1013.25 \text{ hPa}$
 M_w Molare Masse von Wasser; $M_w = 18,015 \times 10^{-3} \text{ kg mol}$
 Cr Konstante des Krümmungseffektes
 r Krümmungsradius [m] $r = 10^{-8} \text{ m}$
 P_w Dichte des Wassers; $\rho = 1000 \text{ kg m}^3$ bei $t = 0 \text{ }^\circ\text{C}$ und $p = 1013.25 \text{ hPa}$
 R Universelle Gaskonstante; $R^* = 8.3143 \times 10^3 \text{ J kmol K}$
 T Absolute Temperatur $T = 293.15 \text{ K}$ (20°C)

$$U_{sTr} = \frac{E_{Tr}}{E_w} \cdot 100 = \left(1 + \frac{2 \cdot \sigma \cdot M_w}{\rho_w \cdot R \cdot T} \frac{1}{r} \right) \cdot 100 \left[\frac{\text{N kg m}^3 \text{ mol K}}{\text{m mol kg J k m}} \right]$$

$$U_{sTr} = \frac{E_{Tr}}{E_w} \cdot 100 = \left(1 + \frac{2 \cdot 72.5 \times 10^{-3} \cdot 18,015 \times 10^{-3}}{1000 \cdot 8.3143 \times 10^3 \cdot 293,15} \frac{1}{10^{-8}} \right) \cdot 100$$

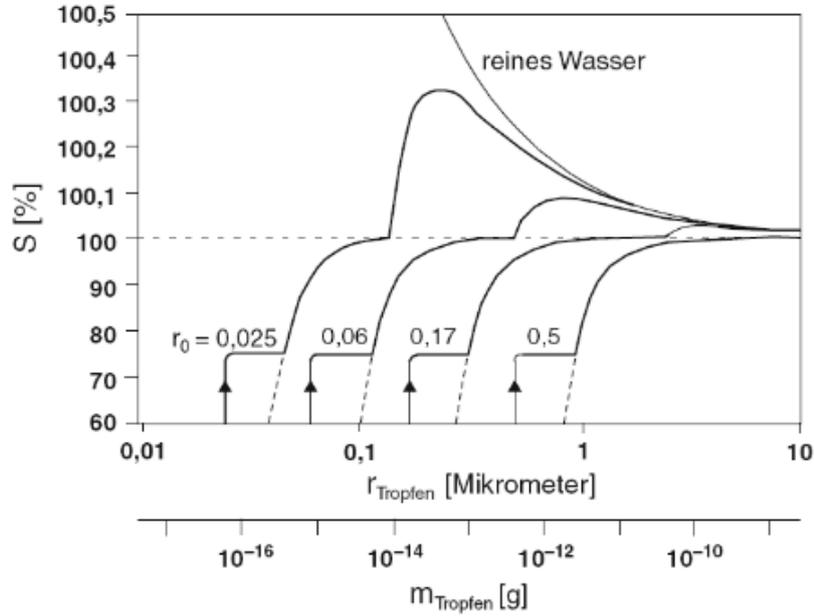
$$U_{sTr} = \left(1 + \frac{2612,175}{24373,37045} \right) \cdot 100 \approx 110,72 \%$$

Tropfenwachstum und Kondensation

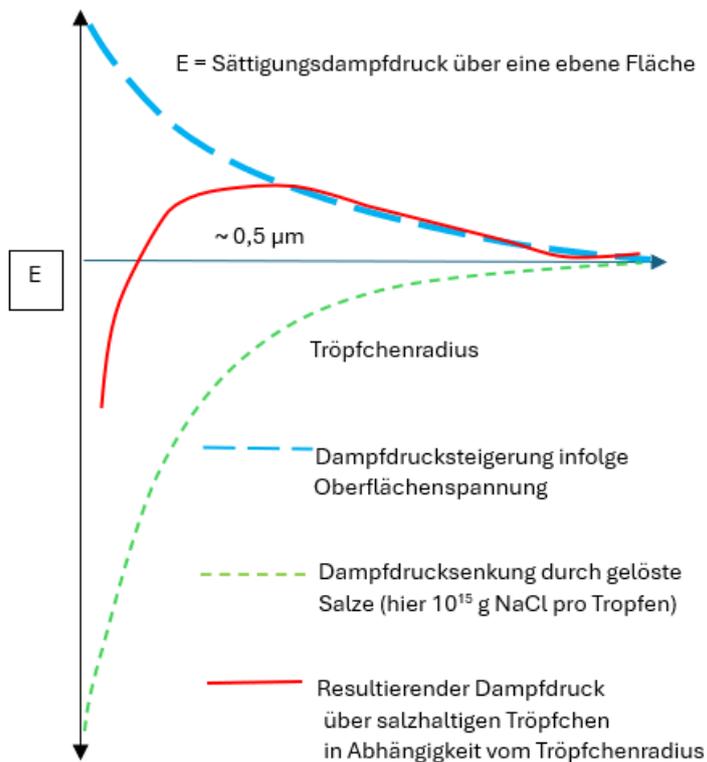


Grafik Köhlerkurve: Zusammenhang von Tröpfchengröße, Sättigung von reinem Wasser und einer Salzlösung.

- U_w* relative Sättigungsfeuchte [%]
- K_r* kritischer Tropfenradius durch Übersättigung
- K_f* kritische Feuchte
- CH* Chemisch reiner Wassertropfen
- Salzkern



Grafik: (Internet) Köhlerkurve



Über einem Kondensationskern bzw. Lösungstropfen ist der Sättigungswert von seiner Größe und dessen hygroskopischen Wirksamkeit abhängig. Daher ist der Sättigungsdampfdruck über gekrümmten Oberflächen größer mit Radien $< 10^{-6}\text{m}$, als über ebenen Wasseroberflächen (Sättigungswert 100%) und über Lösungen geringer.

Die Abbildung 1 zeigt den Verlauf eines Kondensationskerns, dessen relative Sättigungsfeuchte bei etwa 81% liegt. Bei einer geringfügigen Übersättigung wächst der Kern weiter an. Dadurch, dass die Lösungskonzentration abnimmt, wirkt sich die Erhöhung des gesättigten Dampfdrucks durch den Krümmungsradius stärker aus. Die relative Sättigungsfeuchte steigt auf 95%. Gewinnt der Tropfen weiter an Umfang, so kann jetzt der Lösungseffekt, aufgrund der stärkeren Wasserwirkung, den Krümmungseffekt aufheben. Dann würde die relative Feuchte genau den Wert von 100% annehmen. Die Erhöhung des Sättigungsdampfdrucks wird durch das weitere Wachstum des Tropfens immer geringer, da die Oberflächenkrümmung immer kleiner wird, sodass schließlich ein Maximum der relativen Feuchte erreicht wird. In der Grafik ist die kritische Feuchte bei 100,6 % erreicht. Man nennt diesen Punkt auch den kritischen Tropfenradius. Sofern noch eine Übersättigung vorhanden ist, könnte der Tropfen unbegrenzt weiter an Umfang gewinnen. Die Sättigungsfeuchte wird durch den Umfang wieder geringer und nähert sich schlussendlich der chemisch reinen, ebenen Wasseroberfläche (rel. Feuchte 100%) an. Der kritische Radius des Tropfens bei der maximalen Sättigungsfeuchte kann über die folgende Gleichung berechnet werden.

$$K_r = \sqrt{\frac{c_3 \cdot i \cdot m_s \cdot T}{M_s}}$$

$$K_r = \sqrt{\frac{3,8681 \times 10^{13} [\text{K} \cdot \text{g} \cdot \mu\text{m}] \cdot 2 \cdot (10^{-15}\text{g}) \cdot 273\text{K}}{58,44}} = 5,8 \mu\text{m}$$

Bei einem Radius des Tropfens von $5,8 \mu\text{m}$ ist die kritische Sättigungsfeuchte:

$$K_f = \sqrt{\frac{c_4 \cdot M_s}{i \cdot m_s \cdot T^3}}$$

$$K_f = \sqrt{\frac{1.278 \times 10^{-15} \text{K}^3 \cdot \text{g} \cdot 58.44}{2 \cdot (10^{-15} \text{g}) \cdot 273^3}} = 100.96\%$$

Wie vergrößert sich nun der Tropfen von 5,8 μm innerhalb einer Minute bei einer Übersättigung von knapp 1%:

$$R_{\Delta T} = \sqrt{R^2 + 2 \times (s - 1) \times t}$$

$$R_{\Delta T} = \sqrt{5,8 \mu\text{m}^2 + 2 \times (1\% - 1) \times 60 \text{ s}}$$

$$R_{\Delta T} = 12,4 \mu\text{m}$$

Der Tropfen ist in einer Minute um weitere 6,6 μm angewachsen

Anzahl und Größe der Tropfen (Hydrometeore)

- Wie groß werden die Tropfen, wenn die Anzahl der Hydrometeore bei 10^8 in einem Kubikmeter vorliegen. Der Dampfgehalt soll 4 g/kg betragen
- Wie ändert sich die Tropfengröße, wenn die spezifische Feuchte auf 8 g/kg ansteigt und die Anzahl der Tropfen 10^{10} beträgt.
- Welcher Radius eines Tropfens liegt, vor, wenn der Dampfgehalt bei 8 g/kg unverändert bleibt, jedoch die Anzahl der Tropfen auf 10^7 verringert wird.
-

p	Luftdichte	1 [kg]
s	Spezifische Feuchte (Dampfgehalt)	4 g/kg 0,004 kg/kg
n	Anzahl der Tropfen pro m^3	10^8 m^3
H_2O	Wasser	10^3 kg/m^3

$$R = \frac{3 \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right] \times s \left[\frac{\text{kg}}{\text{kg}_L} \right]}{4 \pi \left[\frac{10^3 \text{ kg}_{H_2O}}{\text{m}^3} \right] \times n} 1/3$$

$$R = \left[\frac{3 \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right] \times (4 \times 10^{-3}) \left[\frac{\text{kg}}{\text{kg}_L} \right]}{4 \pi \left[\frac{10^3 \text{ kg}_{H_2O}}{\text{m}^3} \right] \times (10^8 \text{ m}^3)} \right] 1/3$$

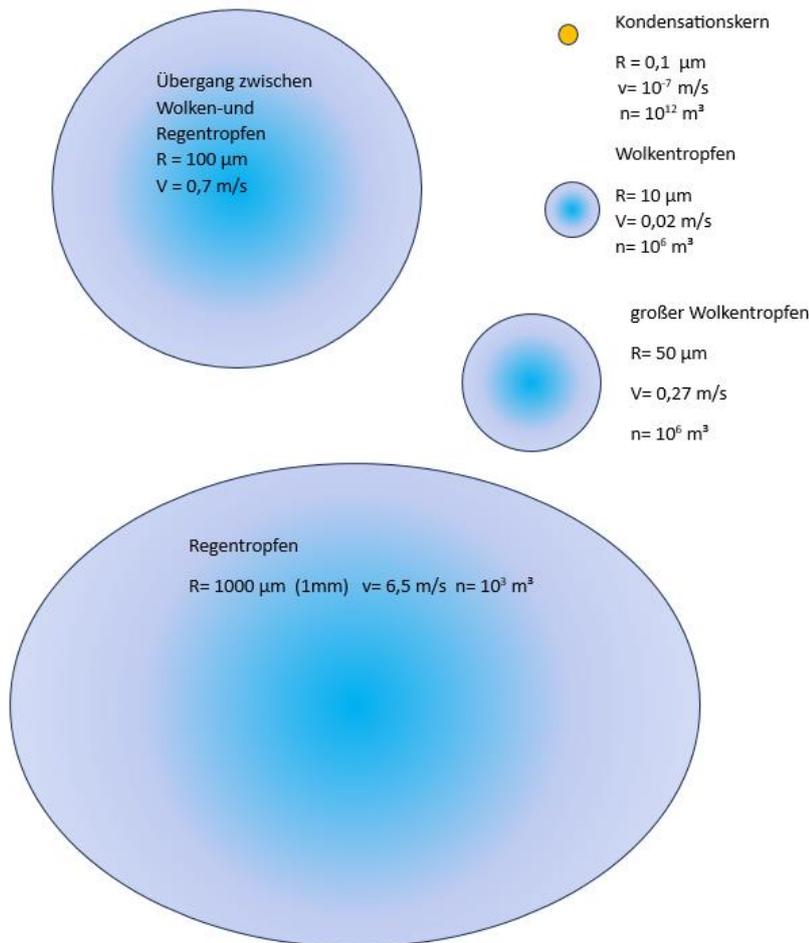
- $R = 2,12 \times 10^{-5} \text{ m} = 21,2 \mu\text{m}$
- $R = 9,1 \times 10^{-6} \text{ m} = 9 \mu\text{m}$
- $R = 5,7 \times 10^{-5} \text{ m} = 57 \mu\text{m}$

Das Ergebnis unter b) zeigt trotz einer Erhöhung der Tropfenanzahl und eine Verdoppelung der Zufuhr an Feuchte, einen geringeren Radius der Tropfen. Der Grund ist, dass in 1 m³ Luft durch Erhöhung der Tropfenzahl der Radius das Diffusionswachstum der Tropfen verlangsamt, wird bzw. sie ganz aufhören zu wachsen. Je höher die Anzahl der Hydrometeore, desto mehr konkurrieren um die Wassermoleküle und umso kleiner fällt die Tropfengröße aus. Typische Werte für Tropfengrößen reichen von 2 bis 50 µm. Radien von über 50 µm sind bereits Tropfen, die abregnen können. Das untere Beispiel zeigt, dass bei gleichem Flüssigwassergehalt (LWC) und größeren Tropfen eine geringere Fläche pro Kubikmeter Luft projiziert wird als bei kleinerer Tropfengröße. Wodurch in 1 m³ mehr Tropfen vorhanden sind

<p>Wolke 1 44 x 10⁶ Tropfen m³= Ø 10 µm LWC = 0,023 g/m³ Fläche = 34,6 cm² m³</p>	<p>Wolke 2 352 x 10⁶ Tropfen m³= Ø 5 µm LWC = 0,023 g/m³ Fläche = 69,1 cm² m³</p>
---	---

Dimensionsvergleich (nicht Maßstabgetreu) zwischen Kondensationskern, Wolkentropfen und Regentropfen

R= Radius v= Fallgeschwindigkeit n= Anzahl der Partikel pro Volumen



Nebeltröpfchen beginnen meist schon bei 0,01 µm und können schon mal die 40 µm überschreiten. Die Anzahldichte von Wolkentröpfchen in Wasserwolken hängt von der Anzahl der Kondensationskerne ab. Das ist insofern wichtig, da sich beispielsweise Nebel in Verbindung mit Rauch (hohe Dichte von Kondensationskernen) verstärken kann. Die Anzahl der Kondensationskerne variieren zwischen 50 cm³ und 1000 cm³.

Beispiel:

Ein Wolkentropfen hat typischerweise einen Radius von 5 μm , während ein Regentropfen, der aus einer Ansammlung von Wolkentropfen stammt, typischerweise einen Radius von 0,5 mm (500 μm) hat. Wie viele Wolkentropfen werden benötigt, um einen Regentropfen zu bilden?

$$n = \frac{\frac{4}{3} \cdot \pi (R_{\text{Tr}})^3}{\frac{4}{3} \cdot \pi (R_{\text{w}})^3} = \left(\frac{500}{5}\right)^3 = 10^6$$

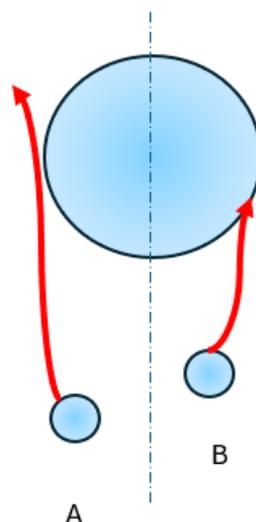
Das Ergebnis zeigt, dass es etwa eine Million Wolkentropfen braucht, um einen Regentropfen zu bilden.

Kondensationskerne in Wolken

Wolkengattung	Anzahldichte Kondensationskerne
Cumulus humulis	300 cm^3
Stratocumulus	350 cm^3
Stratus	500 cm^3
Nebel	1000 cm^3

Vergrößerung der Tropfen durch Koaleszenz und Akkreszenz

In den Auf- und Abwinden einer Wolke, sind die Tröpfchen ständig in Bewegung und kollidieren mit anderen, weshalb sie auf diese Weise zusammenfließen können. Durch die Koaleszenz entstehen spontan größere Tropfen, die bei weiteren Kollisionen eine höhere Wahrscheinlichkeit für das Einfangen weitere Tröpfchen besitzen. Diesen Prozess nennt man Akkreszenz. Durch Koaleszenz und Akkreszenz gewinnen Tropfen, im Gegensatz zum Diffusionswachstum, schnell an Größe. Wobei das Wachstum zunächst langsam, jedoch ab einem Mindestradius von 15 μm schnell exponentiell zunimmt und in einen alleinigen Wachstumsprozess übergeht.

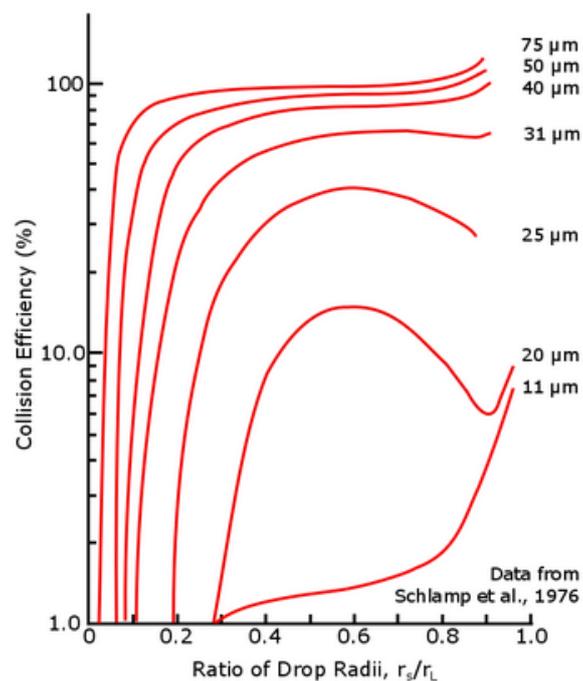


Die kleineren Tröpfchen A und B befinden sich beide in der Bahn des fallenden größeren Tropfens. Im Verhältnis zum großen Tropfen wird das kleine Tröpfchen A durch die den großen Tropfen umströmende Luft zur Seite geschoben und kollidiert nicht. Tröpfchen B, das sich näher an der Mittellinie des größeren Tropfens befindet, stößt jedoch an, weshalb der große fallende Tropfen an Größe immer weiter zunimmt.

Die weitere Entwicklung des Tropfens zum Niederschlag

Sobald ein Tropfen einen Radius von einigen 100 μm erreicht hat, fällt er schnell und seine Kollisions-Koaleszenz liegt bei nahezu 100%. Dabei gilt: je größer der Tropfen, desto schneller geht das Wachstum vonstatten.

Mit einer Proportionalitätskonstante zwischen Endgeschwindigkeit und Tropfenradius von $0,8 \times 10^{-3}$ und einem Flüssigwassergehalt ($\text{LWC} = 1 \text{ g m}^{-3}$) kann gezeigt werden, dass ein Tropfen durch Kollision von 50 μm auf über 1000 μm wachsen kann, in nur 25 Minuten. Die aktivierten Wolkentropfen wachsen also durch das langsame Wachstum der Gasphasenabscheidung (Quadratwurzel der Zeit) auf 10–20 μm an. Wenn dann die Kollisions-Koaleszenz beginnt und einige große Tropfen entstehen, können diese mit der Zeit exponentiell wachsen.



Grafik: Internet

$$50 \mu\text{m} \times \exp(25 \text{ min}) = 1200 \mu\text{m}$$

Diffusionswachstum

Diffusion ist der Prozess, bei dem einzelne Wasserdampfmoleküle sich mittels Brownsche Molekularbewegung durch die Luft bewegen und dadurch an Größe gewinnen. Die Nettodiffusionsrichtung verläuft immer entlang des Feuchtigkeitsgradienten in Richtung trockenerer Luft.

Während des Tröpfchenwachstums muss nicht nur Wasserdampf durch die Luft in Richtung des Tröpfchens diffundieren, sondern auch Wärme vom Tropfen weggeleitet werden. Dabei handelt es sich um die latente Wärme, die bei der Kondensation freigesetzt wurde. Ohne Wärmeleitung vom Tropfen weg, würde dieser nicht mehr weiter anwachsen.

Erreichen der Wasserdampf-Diffusionsfähigkeit

Dabei ist $c = 2,11 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ eine empirische Konstante, $P_0 = 1013 \text{ hPa}$ und $T_0 = 273,15 \text{ K}$. Diese molekulare Diffusionsfähigkeit für Feuchtigkeit ähnelt der Wärmeleitfähigkeit für Wärme.

Die Wasserdampfdiffusionsfähigkeit bei $P = 100 \text{ kPa}$ (1000 hPa) und $T = -10 \text{ °C}$ (263 K) ist demnach:

$$D = c \cdot \frac{P_0}{P} \cdot \left(\frac{T}{T_0} \right)^{1.94}$$

$$D = 2,11 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s} \cdot \left(\frac{101,3 \text{ kPa}}{100 \text{ kPa}} \right) \cdot \left(\frac{263 \text{ K}}{273,15 \text{ K}} \right) = 1,99 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}$$

Wenn die Übersättigung der die Tröpfchen umgebenden Luft groß genug ist, wachsen die kleineren Tröpfchen durch Diffusion schneller als größere Tröpfchen, da in der Nähe der kleineren Tropfen größere Feuchtigkeitsgradienten vorliegen. Daher tendieren die kleinen Tröpfchen dazu, die größeren Tröpfchen einzuholen.

Das Ergebnis ist eine Tropfengrößenverteilung, die dazu tendiert, monodispers zu werden, wobei die meisten Tropfen ungefähr den gleichen Radius haben. Es wären Zeiträume von vielen Tagen erforderlich, um regengroße Tropfen allein durch Diffusion wachsen zu lassen. Aber echte Regentropfen bilden sich in viel kürzerer Zeit (Minuten) und haben bekanntermaßen ein breites Spektrum an Größen. Daher kann Diffusion nicht der einzige physikalische Prozess sein, der zur Regenbildung beiträgt.

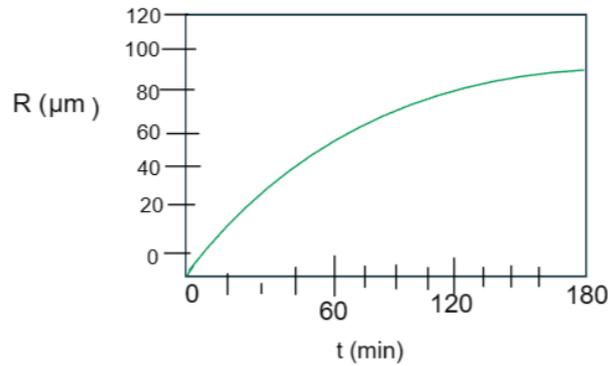
Der Radius R des Tropfens nimmt mit der Quadratwurzel der Zeit t zu, was durch die kombinierten Effekte von Wasserdiffusivität und Wärmeleitfähigkeit bestimmt wird:

Im Folgenden kann nun der Tropfenradius bestimmt werden:

$$R \approx \sqrt{(c \cdot D \cdot S \cdot t)}$$

$$R \approx \sqrt{0,0022 \cdot [(2 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s})] \cdot (0,01) \cdot 120 \text{ min}}$$

$$R \approx 69 \text{ } \mu\text{m}$$



Fallgeschwindigkeit von Tropfen

In weniger als einer Sekunde erreicht das Teilchen eine Fallgeschwindigkeit, bei der die Widerstandskraft genau die Gravitationskraft ausgleicht und die Geschwindigkeit konstant wird. Diese Geschwindigkeit wird Endgeschwindigkeit genannt. Da die Gravitationskraft vom Volumen des Tropfens abhängt, entspricht sie der dritten Potenz des Tropfenradius. Im Gegensatz dazu wirkt der Widerstand auf die Oberfläche des Tropfens und hängt daher von der Tropfenfläche ab und entspricht dem Quadrat des Tropfenradius (mal der Geschwindigkeit). Wenn man die Gravitations- und Widerstandskräfte gleichsetzt und dann nach der Endgeschwindigkeit auflöst, lässt sich leicht zeigen, dass die Endgeschwindigkeit linear mit dem Tropfenradius variieren sollte. Messungen bestätigen diesen linearen Zusammenhang. Beispielsweise beträgt die Endgeschwindigkeit eines Tropfens mit einem Radius von $50 \mu\text{m}$ etwa $0,3 \text{ m s}^{-1}$, während die Endgeschwindigkeit eines zehnmal größeren Tropfens (Radius $500 \mu\text{m}$) etwa 4 m s^{-1} beträgt, was nur etwas mehr als ein Faktor ist. Erhöhung um $\cdot 10$.

Beispiele:

Fallgeschwindigkeit eines Wolkentröpfchens mit einem Radius von $r = 10^{-5} \text{ m}$ einem Durchmesser von $d = 0.02 \text{ mm}$

- v Fallgeschwindigkeit des Tropfens [ms]
 ρ_{Tr} Dichte [kg m^{-3}] des Wassertropfens [1000 kg m^{-3}]
 g Erdbeschleunigung [$g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$]
 r_{Tr} Radius des Tröpfchens [$0,01 \text{ mm}$] [10^{-5} m]
 η Dynamische Viskosität [$0,172 \times 10^{-4} \text{ Pa s}$ bei 0°C und 1000 hPa]

$$v = \frac{2}{9} \left(\frac{\rho_{\text{Tr}} \cdot g \cdot r_{\text{Tr}}^2}{\eta} \right) [\text{ms}]$$

$$v = \frac{2}{9} \left(\frac{1000 \text{ kg m}^{-3} \cdot 9,81 \text{ ms}^{-2} \cdot (10^{-5})^2}{0,172 \times 10^{-4} \text{ Pa s}} \right)$$

$$v = 126,7442 \times 10^{-6} \text{ ms}$$

$$v = 0,13 \text{ ms}$$

Fallgeschwindigkeit eines Regentropfens mit einem Radius von $r = 2 \times 10^{-3}$ bzw. mit einem Durchmesser von 4 mm

v	Fallgeschwindigkeit des Tropfens [ms]
ρ_{Tr}	Dichte [kgm ³] des Wassertropfens ρ_{Tr} [1000 kg m ⁻³]
g	Erdbeschleunigung [$g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$]
r_{Tr}	Radius des Tröpfchens [2 mm, $2 \times 10^{-3} \text{ m}$]
c_w	Widerstandsbeiwert (dimensionslos) $c_w = 0,5$ für Tröpfchen von 10^{-3} bis $4 \times 10^{-3} \text{ m}$
ρ	Dichte trockener Luft 1,29 kg m ³ bei 0°C und 1013,25 hPa

$$v = \sqrt{\frac{8}{3} \frac{\rho_{Tr} \cdot g \cdot r_{Tr}^2}{c_w \cdot \rho}}$$

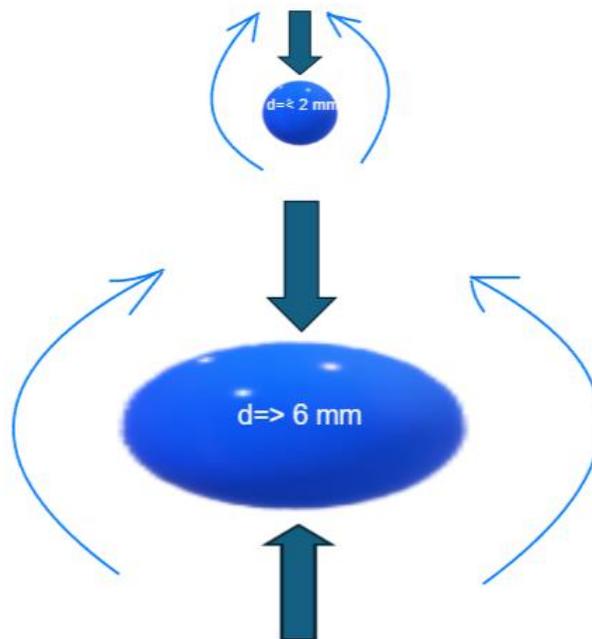
$$v = \sqrt{\frac{8}{3} \frac{1000 \text{ kg m}^{-3} \cdot 9,81 \text{ ms}^{-2} \cdot 2 \times 10^{-3} \text{ m}}{0,5 \cdot 1,29 \text{ kg m}^3}}$$

$$v = 9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Größe und Fallgeschwindigkeit von Hydrometeoren

Art	Durchmesser [mm]	Fallgeschwindigkeit [cm/s]
Wolkentropfen	0,02 - 0,1	1 - 25
Sprühregentropfen	0,1 - 0,5	25 - 200
Regentropfen	0,5 - 5,0	200 - 800
Eisnadeln	1,5	50
Schneesterne	4,2	50
Schneeflocken	10 - 30	100 - 200
Graupel	1 - 5	150 - 300
Hagel	10 - 30	Über 500

Form von Wassertröpfchen im Luftstrom beim Fallen



Sehr kleine Tröpfchen mit Radien von $r < 2 \times 10^{-5}$ m zeigen geringe Fallgeschwindigkeiten, so dass sie von der Luft laminar umströmt werden. F_w wird deshalb mit dem sogenannten Stokeschen Gesetz berechnet, das den Reibungswiderstand eines kugelförmigen Tröpfchens in einer laminaren Luftströmung erfasst. Größere Partikel mit einem Radius von $r > 2 \times 10^{-5}$ und $r < 10^{-3}$ m haben höhere Fallgeschwindigkeiten, so dass die Luftströmung in ihrem Umfeld turbulent wird. Hier wirkt zusätzlich zur Reibung auch noch der sogenannte Druckwiderstand. Ab einer Größe von $r > 10^{-3}$ m (> 1 mm) verformt sich daher die Unterseite des Tropfens im Luftstrom signifikant. Ab einem Radius von etwa $r > 3$ mm zerplatzen sie deshalb bei längeren Fallwegen.

Niederschlagsbildung in kalten Wolken

Von kalten Wolken ist die Rede, wenn in hochreichenden Cumuluswolken (Cumulonimbus) unterkühlte Wassertropfen und Eiskristalle nebeneinander vorkommen. Die warmen flüssigen Tropfen befinden sich selbstverständlich in der unteren Troposphäre. Wasser hat seinen Gefrierpunkt bei 0°C , und man weiß aus der Physik, dass unter 0°C abgekühltes Wasser in Sekunden zu Eis erstarrt, wenn man einen Splitter von einem Eiskristall hineinwirft. Im Gegensatz zum Wasser an Oberflächen, Seen, Teiche, Pfützen usw, beginnt die Eisphase in den Wolken weit unter dem Gefrierpunkt, da dort die früh wirkenden Kristallisationskeime fehlen. Die Folge ist, dass oberhalb der -10°C überhaupt noch keine Eisteilchen vorhanden sind und bis -30°C nur sehr wenige vorkommen. Deshalb spricht man hier auch von den unterkühlten Wassertropfen. Erst bei Temperaturen unter -30°C nimmt der Anteil der Eispartikel zu Lasten der flüssigen Tropfen rasch zu.

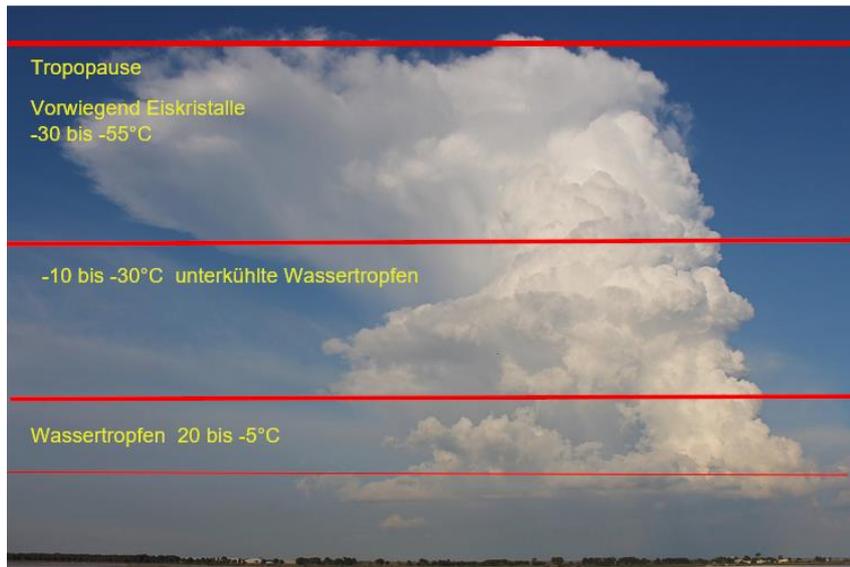
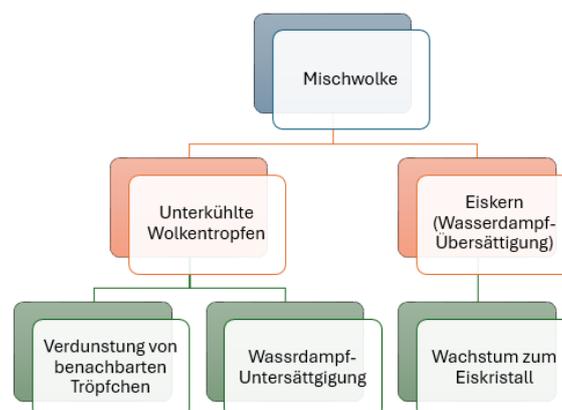


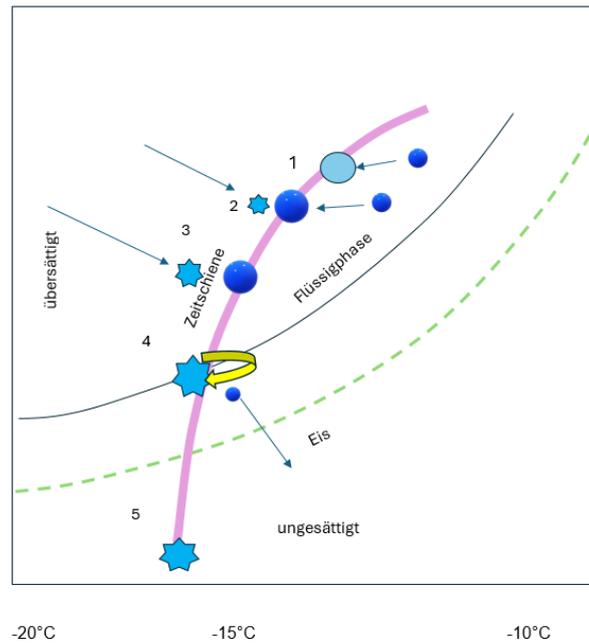
Foto: Der Cumulonimbus reicht über alle Wolkenstockwerke bis zur Tropopause. Dabei durchdringt er sämtliche Temperaturbereiche innerhalb der Troposphäre

0 bis -12°C	Unterkühlte Wassertropfen überwiegen
-13 bis -20°C	Wassertropfen und Eiskristalle in etwa gleich häufig
-20 bis -40°C	Eiskristalle überwiegen
Unter -40°C	Nur Eiskristalle

Wegener-Bergeron-Findeisen* -Prozess

Der Sättigungsdampfdruck ist über Eis geringer als über unterkühlte Wassertropfen. Das bedeutet, dass der Wasserdampf bezüglich des Eiskristalls übersättigt sein kann und ungesättigt in Bezug auf Wasser. Das hat auch eine Konsequenz für den Sublimationsvorgang in den Mischwolken: Der Umgebungsdampfdruck des unterkühlten Wassertropfens ist größer als der Sättigungsdampfdruck des Eispartikels. Dieser fortlaufende Prozess führt dazu, dass die flüssigen Tropfen durch Verdunstung weiter verdampfen und somit schrumpfen, jedoch die Eispartikel über die Dampfphase dadurch schneller wachsen können.





Grafik: Ablauf Bergeron-Findeisen Prozess

Tabelle: Sättigungsdampfdruck in Hektopascal [hPa] über Wasser und Eis

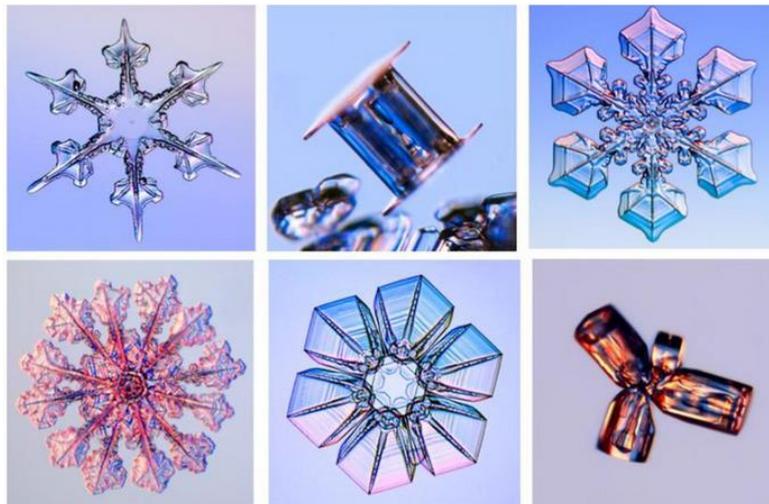
Temperatur °C	0	-10	-20	-30	-40	-50
E_{Wasser} hPa	6,108	2,863	1,254	0,509	0,189	0,063
E_{Eis} hPa	6,107	2,597	1,032	0,380	0,128	0,039
$(E_{\text{Eis}}/E_{\text{Wasser}} \%)$	100	90,7	82,3	74,7	67,8	61,9

Die Tabelle zeigt den Unterschied beim Sättigungsdampfdruck: Bei -10°C über Eis würde bereits bei einer auf Wasser bezogenen relativen Feuchte bereits Sättigung bei 90,7 % eintreten, während die Luft in Bezug auf Wassertropfen noch ungesättigt ist. Ein Haarhygrometer beispielsweise, bezieht seine Angaben immer auf eine Wasseroberfläche. Bei einer relativen Feuchte von 100% herrscht in Bezug auf Eis somit eine Übersättigung. Die Differenz wird folglich immer größer, umso niedriger die Temperatur ist. In Bezug auf Wolken bedeutet diese Konsequenz, dass sich Mischwolken mit der Zeit in reine Eiswolken umwandeln. Als Beispiel sei hier der Cumulonimbus genannt, dessen Amboss sich von unterkühlten Wassertropfen in reine Eiskristalle mutiert ist. Aus ihm können dann nicht nur Hagelkörner fallen, sondern auch großtropfiger Regen, dessen Ursprung aus der Eisphase stammt und auf dem Weg nach unten weiter in die flüssige Phase übergegangen ist. Befindet man sich in den Tropen, wird ein Cumulonimbus so viel mit Wasserdampf angereichert, dass große Tropfen allein schon durch Kondensation und Koaleszenz entstehen können.



Die Grafik illustriert den Bergeron-Findeisen Prozess: Die unterkühlten Wassertropfen beginnen zu schrumpfen und schließlich gehen sie in die Dampfphase über, woraus sich durch Sublimation mehr und mehr Eiskristalle bilden.

Eiskristallformen



Grafik: Internet

Welche Formen die Eiskristalle annehmen hängt von verschiedenen Faktoren ab. Zum einen vom Grad der Wasserdampfübersättigung bezogen auf Eis, vor allem aber von der Temperatur.

Die Tabelle zeigt den Zusammenhang zwischen der Form der Eiskristalle und der Temperatur

0 bis -3°C	dünne Plättchen
-3 bis -5°C	Nadeln
-5 bis -8°C	Prismen
-8 bis -12°C	hexagonale Plättchen
-12 bis -16°C	dendritische Sterne
-16 bis -25°C	Plättchen
-25 bis -50°C	Prismen

Gefrierprozess

Für die heterogene Aggregatsänderung gibt es vier verschiedene Prozesse. Je nach den vorhandenen Substanzen (Gefrierkeime) in der Troposphäre, sind auch unterschiedliche Temperaturen für das Gefrieren ausschlaggebend. Angaben in °C.

- 1 Kontakt
- 2 Kondensation
- 3 Ablagerung
- 4 Immersion
- X kein Prozess

Substanz	Prozess			
	1	2	3	4
Silberjodid	-3	-4	-8	-13
Kupfersulfid	-6	x	-13	-16
Bleijodid	-6	-7	-15	x
Cadmiumjodid	-12	x	-21	x

Hagelbekämpfung

Silberjodid beispielsweise hat eine dem Eis ähnliche Gitterstruktur, welches man glaubt bei der Bekämpfung von Hagel einsetzen zu können. Hier werden nun Flugzeuge mit Generatoren unter den Tragflächen versehen, die das Silberjodid an der Basis von Gewitterwolken ausbringen. Der Bergeron-Findeisen Prozess soll somit künstlich erzeugt und das weitere Anwachsen von Eis verhindert werden. Im Prinzip ist dies nur ein Wunschgedanke. Denn die Mengen, die an der Wolkenbasis verteilt werden, sind gegenüber der Mächtigkeit eines Cumulonimbus derart gering, dass ein solcher Effekt sich buchstäblich in Luft auflöst. Insbesondere dann, wenn es sich um rasch entstehende Gewitterzellen handelt, in denen das Eis schneller anwächst, als die geringe Menge an ausgebrachtes Silberjodid dies verhindern soll. Oder beispielsweise eine sich aufbauende Gewitterfront, deren Volumen und Fläche über hunderte von Kilometern reicht, würde die ausgebrachte Menge eines Hagelfliegers völlig untergehen. Warum heute noch hunderttausende von Euro in ein System gesteckt werden, dessen Erfolg nicht erwiesen ist, erschließt sich mir nicht.

Ansatzweise kann nun bestimmt werden, wie viele Partikel von Silberjodid in die Wolke eingebracht werden muss, um die Anzahl der Eiskeime zu verdoppeln. Die Dichte der in der Wolke vorhandenen Eiskeime beträgt 10.000 pro Kubikmeter Luft. Um die Eiskeime zu verdoppeln, muss die die Anzahl der eingebrachten Silberjodid-Kerne gleich der natürlichen Kerne sein.

In der Berechnung gehen wir von einer Grundfläche der Gewitterwolke von 144 km² aus. Der Gefrierpunkt des Cumulonimbus soll in einer Höhe von 3000 Metern liegen. Das Top reicht bis zur Tropopause in 12000 Meter Höhe.

(12 - 3 km) = 9 km.

- Das Volumen der Wolke ist somit 144 km² x 9 km = ~1300 m³ = 1.3 x 10¹² m³
- Die Menge der Silberjodid-Kerne, die verdampft werden muss beträgt: (10.000 m⁻³) x (1.3 x 10¹² m³)

$i = 1.3 \times 10^{16}$ Kerne müssten verdampft und in Wolken eingebracht werden, welches eine enorme Menge darstellt.

Immersionsgefrieren

Befindet sich innerhalb eines unterkühlten Wassertropfens bereits ein Eiskeim, kann dieses Tröpfchen bei einem bestimmten Radius gefrieren. Annähernd lässt sich das sogenannte Immersionsgefrieren somit bestimmen:

$$T = T_1 + T_2 \cdot \ln \left(\frac{R}{R_0} \right)$$

$$T = (235 \text{ K}) + (3 \text{ K}) \cdot \ln \left(\frac{100 \mu\text{m}}{5 \mu\text{m}} \right)$$

$$T = 244 \text{ K} = -29^\circ\text{C}$$

Wachstumsraten

Die Wachstumsraten hängen in erster Linie von den Kristallformen ab, weshalb man eher über die Bestimmung der Masse der Eiskristalle mit der Wachstumsgleichung zum Ergebnis kommt:

Bei einer Mischphasenwolke (mit Eiskristallen und unterkühlten Wassertropfen) und einer Temperatur von -14°C soll die relative Eismasse bestimmt werden. Die Diffusionsfähigkeit des Wasserdampfes beträgt 1,5 x 10⁻⁵ m² s.

Wie hoch ist die relative Masse der Eiskristalle nach einer Stunde Wachstum bei einem 2 D Kristall mit einer Dicke von 15 μm

c	Dimensionslos [11,85]
p_v	Dichte des Wasserdampfes, absolute Feuchte [g/m ³]
ρ_i	Dichte des Eises [916,3 kg/m ³ bei 0°C]
D	Diffusivität [1,5 x 10 ⁻⁵ m ² s]
S	Übersättigunganteil 0,157
t	Zeit [1 h]
d	Durchmesser [15 μm = 1,5 x 10 ⁻⁵ m]
m	Masse [kg]
T	Temperatur [259 K]

$$m = \frac{c}{d} \cdot \frac{\rho v^2}{\pi} \cdot \left[(D \cdot S \cdot t)^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$m = \frac{5,09}{1,5 \times 10^{-5} \text{m}} \cdot \frac{\left(0,00168 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right)^2}{916,3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} \cdot \left[(1,5 \times 10^{-5} \cdot (0,157 \cdot 3600 \text{ s})^{\frac{1}{2}}) \right]$$

$$m = 7,51 \times 10^{-8} \text{kg} = 7,51 \times 10^{-5} \text{g}$$

Weitere Anlagerung von Eis bis zum Hagelkorn

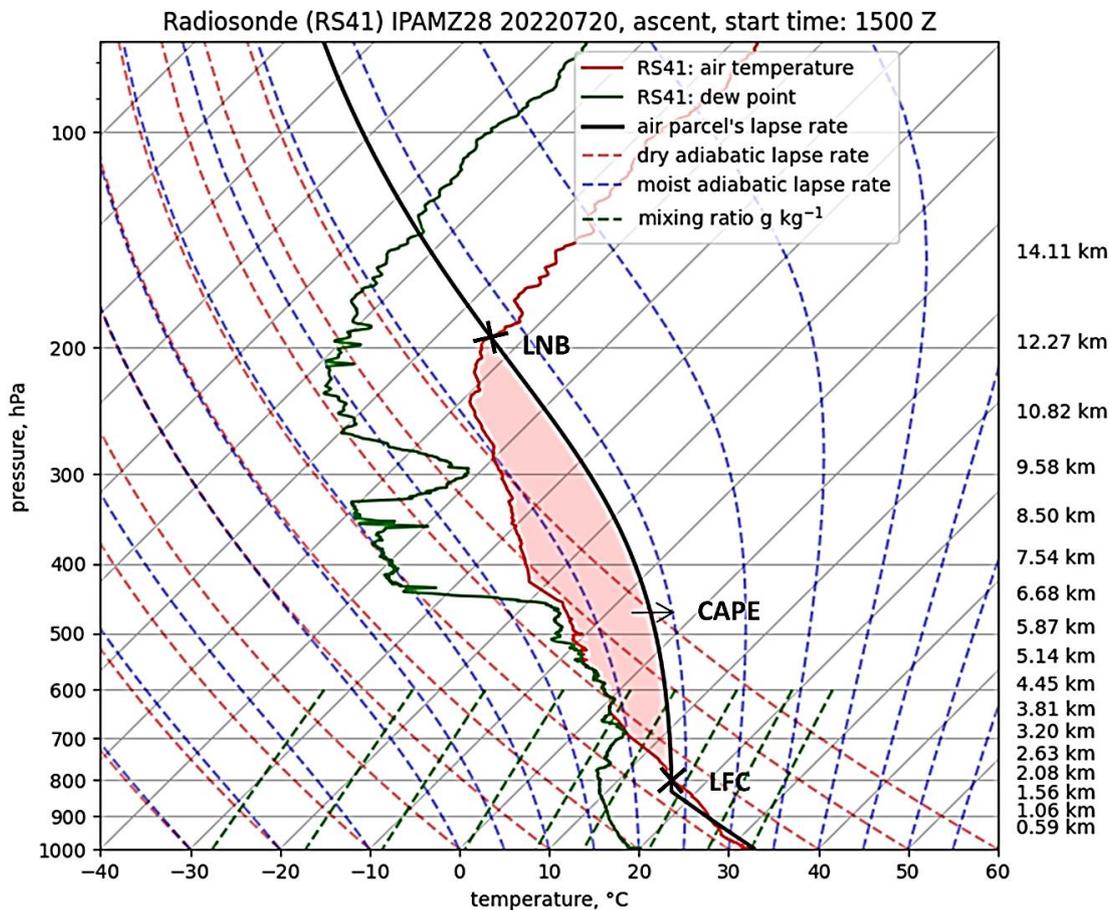
Hagel entsteht in erster Linie nur in Cumulonimbuswolken, die kräftige Vertikalwinde im Inneren der Wolke besitzen. Die Voraussetzung für derart hohe Aufwinde, die teils bis zu 40 m/s in unseren Breiten erreichen können ist, dass die Schichtung in der Troposphäre über eine hohe Konvektionsenergie (CAPE) verfügen muss. Das heißt, Werte von 2500 bis über 3000 J/kg_{Luft}. Nur dann kann sich aus den unterkühlten Wassertropfen ein Hagelkorn bilden. Die Eiskörner werden durch die starken Aufwinde dabei so lange in der Wolke gehalten, bis sie eine gewisse Größe und auch Gewicht erreicht haben, bis der Gravitation nichts mehr entgegenhalten können.

Bei der Betrachtung eines einzelnen Hagelkornes, fällt sofort seine ringförmige Struktur auf, in dessen Mitte sich ein eingeschlossener Kern befindet.



Bei diesem Kern handelt es sich um einen gefrorenen Regentropfen oder Reifgraupel, der von einer abwechselnd klaren, oder weißen, porösen Eisschicht umgeben ist. Der ringförmige Aufbau um den Kern entsteht durch die verschiedenen Temperaturbereiche in der Wolke von -40°C bis 0°C, in denen sich das Hagelkorn bewegt und dadurch anwächst.

Vertikalprofil eines Radiosondenaufstieges



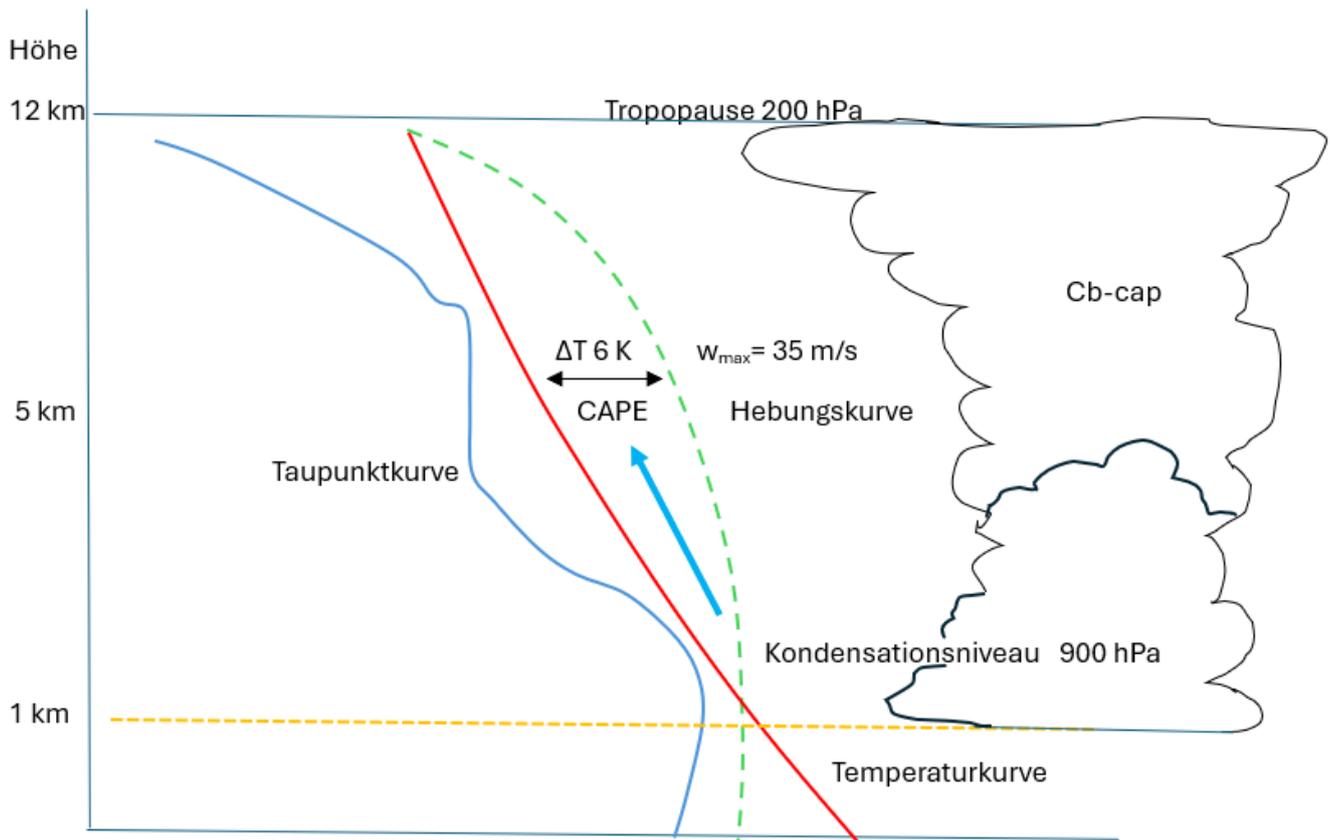
Maßgeblich bestimmend für die Größe der Hagelkörner ist die Masse der Eiskristalle, die Anzahl der Gefrierkerne, die Energie, die von einem unterkühlten Wassertropfen abgeführt wird und die Vertikalbeschleunigung innerhalb eines Cumulonimbus.

Die Grafik zeigt ein Vertikalprofil eines Radiosondenaufstieges. Die rote Fläche markiert die Konvektionsenergie. Je größer die Fläche, desto stärker die Vertikalbeschleunigung.

Das folgende Beispiel soll dies verdeutlichen:

Die Grafik zeigt einen feuchtilabilen Schichtungszustand in der Troposphäre, in der sich durch den starken Aufwind ein Cumulonimbus-capillatus entwickelt hat. Die Temperaturdifferenz zwischen der Hebungs- und Temperaturkurve soll 6 K betragen.

- Ermittelt werden soll nun die Konvektionsenergie (CAPE)
- Die Vertikalgeschwindigkeit
- Die Hagelkorngröße



- RL Allgemeine Gaskonstante der Luft [J/Kg K]
 LFC Niveau der freien Konvektion [m]
 EL Gleichgewichtshöhe [m]
 T_{vp} Virtuelle Temperatur des Luftpaketes [K]
 T_{vu} Virtuelle Temperatur der umgebenen Luft [K]
 $dz p$ Differenz der Druckflächen [hPa]

$$CAPE = RL \int_{EL}^{LFC} (T_{vp} - T_{vu}) d \ln p$$

$$CAPE = 287 \frac{\text{J}}{\text{kg}} \times (6 \text{ K}) \times \ln \left(\frac{900 \text{ hPa}}{200 \text{ hPa}} \right)$$

$$CAPE = 2590 \text{ J/kg}$$

$$w_{\max} \sqrt{2 \times CAPE}$$

$$w_{\max} \sqrt{2 \times 2590 \text{ J/kg}} = 71,9 \text{ ms} = 259 \text{ km/h}$$

$$w_{\max} = 129 \frac{w_{\max}}{2} = 35 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 35 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

a) *Bestimmung der Hagelkorngröße*

R_{Ha} *Radius des Hagelkorns [m]*

C_w *Widerstandsbeiwert~ 0.7 für runde Hagelkörner*

P_d *Dichte trockene Luft [1.2929 kg m³]*

V_{A^2} *Vertikalgeschwindigkeit [ms²]*

P_{Ha} *Dichte von Eis bei 0 °C; [$\rho = 917 \text{ kg m}^3$]*

g *Erdbeschleunigung [9,81 ms²]*

$$R_{Ha} = \frac{3}{8} \left(\frac{C_w P_d V_{A^2}}{P_{Ha} g} \right)$$

$$R_{Ha} = \frac{3}{8} \times \left(\frac{0,7 \times 1,29 \text{ kg} \times 35 \text{ ms}^2}{917 \text{ kg m}^3 \times 9,81 \text{ ms}^2} \right)$$

$$R_{Ha} = 4,6 \times 10^{-2} \text{ m} \times 100 = 4,6 \text{ cm}$$

Überblick über die verschiedenen Aggregatzustände in einem Cumulonimbus



Auf der linken Seite ist der Warmregen-Vorgang dargestellt. Die Größenordnung der Wolkentropfen erreichen hier Radien von über $100\ \mu\text{m}$. Der Niederschlagsprozess wird durch Zerfall und weiteres Wachstum durch Koaleszenz (Kettenreaktion) weiter aufrechterhalten.

Auf der rechten Seite ist der Bergeron-Findeisen Prozess abgebildet. Durch die Mechanismen der Keimbildung (Gefrieren – Sublimation) können die entstandenen Eiskristalle weiter zur Vergraupelung führen. Graupelkörner bzw. Eisteilchen sind dann in der Lage, bei ausreichenden Vertikalwinden in Wolken mit hohem Flüssigwassergehalt zu Hagel heranwachsen.

* Alfred Wegener (1880 – 1930); Meteorologe und Geophysiker; Tor Bergeron (1891 – 1977) Meteorologe; Walter Findeisen (1909-1949) Meteorologe

Literatur:

Physik unserer Umwelt (Rödler)
 Meteorologie (Klose)
 Atmospheric Science (Wallace, Hobs)
 Practical Meteorologie (Stull)
 Die Atmosphäre der Erde (Kraus)
 Cloud and Precipitation Microphysics (Straka)

©Lothar Aeckerle 2024